# MA2 – „písemná" přednáška 15.4.2020

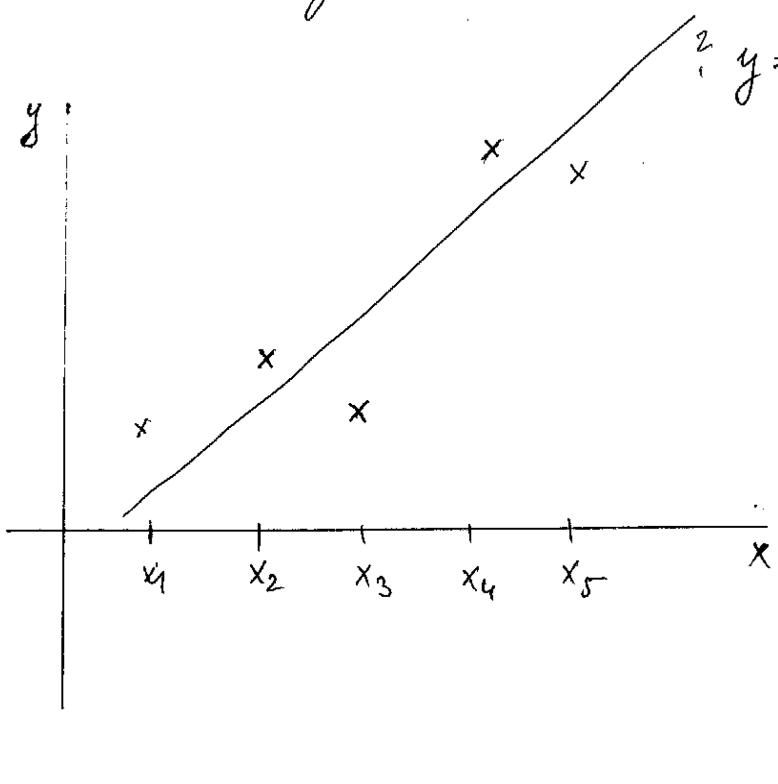
## Extrémy funkcí více („u nás" spec. dvou) proměnných

Vyšetřování extrémů funkcí více proměnných je důležité v mnohých aplikacích – uvedeme si na úvod dva příklady, které vyřešíme závěrem, až budeme „vědět", jak.

1. Máme za úkol najít rozměry vany tvaru hranolu tak, aby povrch (bez víka) vany byl minimální, když je dán objem vany $V$.

2. Metoda „nejmenších čtverců"

Měříme opakovaně veličinu $y = y(x)$ a předpokládáme, že $y(x)$ je lineární funkce, tj. $y = ax+b$ – a otázka: jak „najít" koeficienty $a, b$ tak, aby hodnoty vypočítané, (tj. $y(x) = ax+b$), byly „co nejblíže" těm hodnotám naměřeným?




? $y = ax+b$ – až je třeba

1) definovat, co znamená „nejblíže"

2) a pak to „umět najít"

Začneme „slovníkem" – tj. definicemi potřebných pojmů
(a srovnejte s pojmy při vyšetřování extrémů funkce jedné proměnné v MA1)

V MA1 ($f: M \subset R \to R$) jsme měli:

1) globální extrém (maximum, minimum) fce $f$ na $M$;
2) lokální extrém fce (spec. ostrý lokální extrém) v $x_0 \in M$, $x_0$ – vnitřní bod $M$;
3) existence extrémů + metody nalezení extrémů globálních i lokálních.

Nyní: $f: G \subset R^n \to R$:

Definice: $f: G \subset R^n \to R$; řekneme, že $f$ nabývá v bodě $X_M \in G$ (resp. $X_m \in G$) svého globálního maxima (resp. minima), když platí: $\forall X \in G: f(X) \leqq f(X_M)$ (resp. $f(X) \geqq f(X_m)$)

Příklady:

1) $f(x,y) = x^2+y^2$, $G = R^2$:

$f(x,y) \geqq 0$ v $R^2$, $f(0,0)=0 \Rightarrow$ $f$ nabývá v bodě $(0,0)$ svého globálního minima $(=0)$ v $G$

$f(x,0) = x^2$ a $\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = +\infty \Rightarrow$ $f$ nemá na $G$ globální maximum (analogicky jako u fcí jedné proměnné)

2) $f(x,y) = x^2+y^2$, $G = \{(x,y) = x^2+y^2 \leqq 4\}$.

(množina G je omezená a uzavřená, tedy kompaktní – – G je kruh o středu v $(0,0)$ a poloměru $r=2$ (včetně hranice)) globální minimum má f „stále" v bodě $(0,0)$, a globální maximum je na „celé" kružnici $x^2+y^2=4$, neboť pro vnitřní body $(x,y) \in G^0$ je $x^2+y^2<4$, a na kružnici $x^2+y^2=4$ je $f(x,y) = x^2+y^2 = 4$.

3) „obrácené": $f(x,y) = 4-(x^2+y^2)$:

(i) $G = R^2$: f má na $R^2$ globální maximum v $(0,0)$ $(=4)$ a nemá globální minimum ($\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = -\infty$)

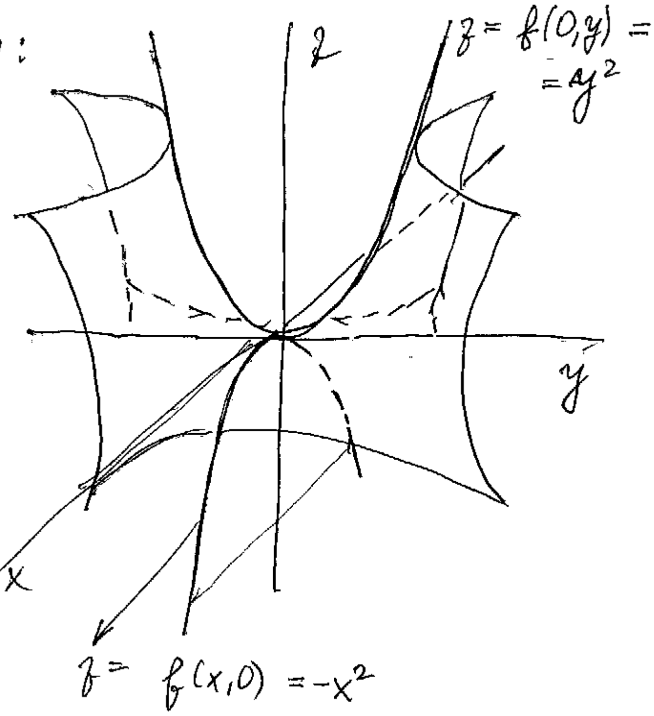
(ii) na $G = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leqq 1\}$ má f globální maximum (stále) v bodě $(0,0)$, a globální minimum na kružnici $x^2+y^2=1$ (ve všech bodech kružnice), kde je $f(x,y) = 4-1 = 3$

4) a) $f(x,y) = y^2-x^2$ (t.zv. sedlová plocha – viz neumělý náčrtek), $G = R^2$

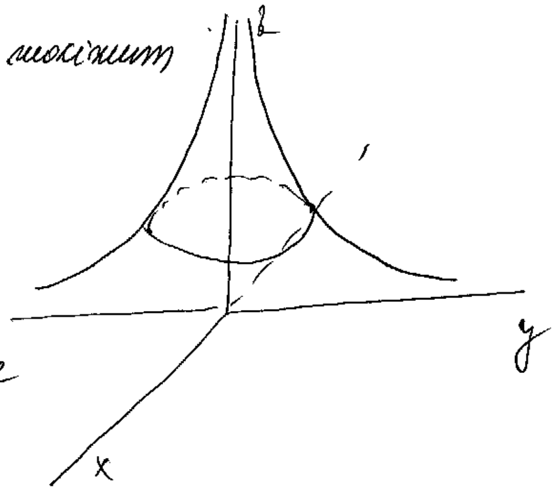
f nemá na $R^2$ ani globální maximum ani globální minimum:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = -\infty$$

$$\lim_{y\to\pm\infty} f(0,y) = +\infty$$



b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ , $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$




f – nemá v G ani globální maximum ani globální minimum;

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$ a

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0) = 0$, přičemž ale

že $f(x,y)>0$ !

Ale jistě:

5) $f(x,y) = x^2+y^2$ ; $G = \{(x,y);\ x^2+y^2<4\}$ –

G je sice omezená, ale je otevřená množina – f má na G globální minimum v $(0,0)$ ($f(0,0)=0$), ale globálního maxima v G nenabývá! Když $x^2+y^2\to 4$, pak $f(x,y) = x^2+y^2 \to 4$, ale hodnoty 4 nikdy nenabyde (z definice limity plyne, že nemůže existovat $X_M \in G$ tak, že $f(X_M) < 4$ a $f(x,y) \leqq f(X_M)$)

6) a „naopak": $f(x,y) = y^2-x^2$ na $G=\{(x,y);\ x^2+y^2 \leqq 1\}$.

(G – kompaktní množina) – zde je „vidět", že $f(x,y)$ bude mít globální maximum na parabole $z=y^2 (=f(0,y))$, pak $f(0,y)$ bude maximální na hranici G pro $y=\pm 1$, tj. f bude mít globální maximum $f(0,-1)=f(0,1)=1$, a f bude „nejmenší" na parabole $z=-x^2 (=f(x,0))$, a globální minimum na G je $f(-1,0)=f(1,0)=-1$

A odtud máme otázky:

1) kdy $f$ nabývá na $G \subset R^2$ (obecně $G \subset R^n$) globálních extrémů?

2) jak extrémy najít, když problém nebude tak „průhledný" jako v uvedených příkladech?

Jediné, co „víme" (srovnejte s funkcemi jedné proměnné)

1. Věta: Je-li $f$ funkce spojitá na $G \subset R^n$, $G$ kompaktní množina, pak $f$ nabývá na $G$ globálního maxima i globálního minima.

(připomenutí – $G \subset R^n$ je kompaktní, je-li omezená a uzavřená)

2. (?) Jak „najít" globální extrémy funkce více proměnných?

Připomeňme, co víme z MA1:

globální extrém funkce jedné proměnné mohl být tam, kde $f$ měla také lokální extrém nebo v hraničních bodech intervalů, pokud tyto body patřily "do množiny, ve které jsme extrémy vyšetřovali (např. definiční obor)

U funkcí více proměnných –

lokální extrémy – asi „podobně" jako v MA1, ale hranice množiny, kde funkce vyšetřujeme – asi „horší" !

Ukažme to na příkladu posledním – zatím jen na hranici $G$, lokální extrémy budeme definovat a „zkoumat" za chvíli:

$f(x,y) = y^2 - x^2$ , $G = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leqq 1\}$

1) G je množina omezená a uzavřená, tedy kompaktní. f je funkce spojitá na G $\Big\} \Rightarrow$

f na G nabývá svých globálních extrémů

2) na hranici $\partial G = \{[x,y];\ x^2+y^2 = 1\}$ :
zde již funkce $f(x,y)$ není funkce dvou „nezávislých" proměnných, ale proměnné $x, y$ jsou zde „svázány" – jedna proměnná závisí na té „druhé":

$$x^2+y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1-x^2$$

a tedy f na hranici bude fce jedné proměnné:

$$f(x,y)\Big|_{(x,y)\in\partial G} = g(x) = (1-x^2)-x^2 = 1-2x^2, \quad x \in \langle -1,1\rangle ,$$

a tedy vyšetříme extrémy funkce $g(x)$ na uzavřeném intervalu $\langle -1,1\rangle$ (a to už „umíme"):

1) $g(1) = g(-1) = -1$ – podezřelé" body z extrému „jsou" krajní body $x = \pm 1$

2) v $(-1,1)$ : $g'(x) = -4x$ , $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – – tj. další podezřelý bod je stacionární bod fce g, a $g(0) = 1$

Tedy, u funkce $f(x,y)$ jsou z extrému „podezřelé" body : $x = \pm 1 \Rightarrow y = 0$ : $[1,0]$, $[-1,0]$
$x = 0 \Rightarrow y = \pm 1$ : $[0,1]$ ; $[0,-1]$

a $f(1,0) = f(-1,0) = -1$ ? globální minimum
$f(0,1) = f(0,-1) = 1$ ? globální maximum

Tedy se shodujeme s „naším pohledem" na danou funkci dříve, jen ještě je třeba ukázat, že v $G^0 = \{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$ není žádný další lokální extrém, který by pak mohl být i extrémem globálním – a máme další problém:

Body lokálního extrému funkce $f(x,y)$ a jak je najít?

Definice: (analogická k „funkcím jedné proměnné") (v $R^n$ obecně)

$f: G \subset R^n \to R$, $X_0 \in G^0$ (tj. $X_0$ je vnitřní bod $G$):

$f$ má v bodě $X_0$ lokální maximum (resp. lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, resp. ostré lokální minimum), jestliže existuje okolí bodu $X_0$, $U(X_0) \subset G$ tak, že platí:

$\forall X \in U(X_0): f(X) \leqq f(X_0)$ (resp. $f(X) \geqq f(X_0)$), resp.

ex. $P(X_0)$ tak, že platí:

$\forall X \in P(X_0): f(X) < f(X_0)$ (resp. $f(X) > f(X_0)$).

Jak najít body lokálního extrému funkce $f$?

(1) ? kritické body pro lokální extrém $f: G \subset R^n \to R$:

(tj. body „podezřelé" z lokálního extrému)

(2) jak vyřešit „situaci" v kritických bodech?

Začneme (1):

připomenutí z MA1 (fce jedné proměnné) – kritické body:

(i) body nespojitosti fce
(ii) body, kde $f$ neměla derivaci
(iii) body, kde $f$ měla derivaci nulovou
(zde „nemusel" být extrém, ale: $f'(x_0) \neq 0 \Rightarrow f$ nemá v $x_0$ lok. extrém)

<u>a u $f: G^0 \subset R^n \to R$</u>: kritické body pro lokální extrém:

(i) body nespojitosti funkce
( příklad : $f(x,y) = 0$ pro $(x,y) \neq (0,0)$ , $f(0,0) = 1$ )

(ii) body, kde neexistuje některá z parciálních derivací funkce
(příklad : $f(x,y) = |xy|$ – neostré minimum v bodech $(x,0)$ ( i globální ), $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ neexistuje )

(iii) body, kde jsou všechny parciální derivace funkce nulové; tj. body $X_0 \in G^0$ takové, že $\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0$ , $i = 1,2..n$
(tj. $\nabla f(X_0) = \vec{o}$ ) – <u>$X_0$ opět se nazývá stacionární bod</u>

Nebot' platí (analogie opět s. MA1)

<u>Věta ( nutná podmínka lokálního extrému)</u>

Nechť $f: G \subset R^n \to R$, $f \in C^{(1)}(G)$, $G$ - otevřená množina ;
Jestliže $f$ má v bodě $X_0 \in G$ lokální extrém, pak
$\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = 0$ , $i = 1,2..,n$ .

<u>Naznačení důkazu</u> (pro pochopení smyslu věty):
kdyby $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X_0) \neq 0$ pro „nějaké" $j$, pak by funkce jedné proměnné $g(x_j) = f(x_1^0,.., x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0,..,x_n^0)$ , díky tomu, že $g'(x_j^0) \neq 0$ , neměla v bodě $x_j^0$ lokální extrém $\Rightarrow$
$f(x_1,..,x_n)$ nemá v $(x_1^0,..,x_n^0)$ lokální extrém (plyne z definice) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) = .. = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) = 0$

A zpět k našemu příkladu:

$f(x,y) = y^2 - x^2$ na $G = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq 1\}$ :

$f$ jsme už vyšetřili na $\partial G$, zbývá $G^0 = \{(x,y);\ x^2+y^2 < 1\}$:

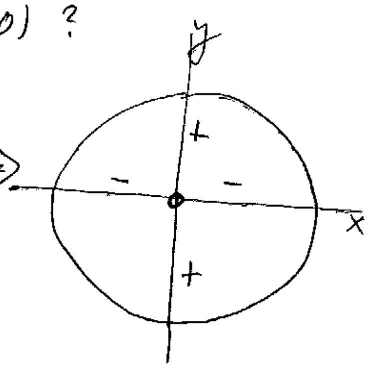
$f \in C^{(1)}(G^0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y$,

tj. $\nabla f(x,y) = (-2x, 2y)$

stacionární body: $\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

A zbývá - zjistit, zda je zde lokální extrém:

nakreslíme obecně, tedy „pokus" - jak se chová $f$ v okolí bodu $(0,0)$ ?




$$\left.\begin{array}{l} f(0,0)=0, \quad f(x,0)<0 \ \text{ v libovolném } P(0,0) \\ \quad\quad\quad\quad\quad \text{a } f(0,y)>0 \ \text{ v libovolném } P(0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ nemá v bodě $(0,0)$ lokální extrém, tedy ani globální!

(poznámka: negace „definice" lokálního extrému, tj. $f$ nemá v bodě $X_0 \in G^0$ lokální extrém, když platí:

$\forall\, U(X_0)\ \exists\, X_1, X_2 \in U(X_0):\ f(X_1) > f(X_0) \wedge f(X_2) < f(X_0)$ )

Tedy závěr příkladu:

$f$ má na $G$ globální extrémy na hranici $\partial G$, a to v bodech $[-1,0]$ a $[1,0]$ globální minimum $(=-1)$ a v bodech $[0,1]$ a $[0,-1]$ globální maximum $(=1)$, uvnitř $G$ žádný extrém (ani lokální) funkce nemá.

A několik dalších poznámek:

1) $\nabla f(X_0) = \vec{o}$ je nutná podmínka lokálního extrému funkce $f$ na $G$ ($X_0 \in G^0$);
bod $X_0$, kde $\nabla f(X_0) = \vec{o}$, ale v $X_0$ není lokální extrém, se nazývá sedlový bod funkce $f$ (asi podle „sedlové plochy" – – v „našem" příkladu – asi nejjednodušší příklad – jaký je zde)

2) Pokud vyšetřujeme jen globální extrémy funkce na $G$, pak nemusíme zjišťovat, zda v bodech „kritických" pro lokální extrém je či není lokální extrém – stačí hodnoty funkce v těchto bodech a srovnat s hodnotami funkce v „podezřelých" bodech na hranici $G$ (pokud je např. $G$ kompaktní, nebo obsahuje některé hraniční body) nebo je třeba pak vyšetřit chování funkce v $G$ (viz naše příklady).

3) Vyšetření chování funkce $f: G \subset R^n \to R$ na hranici $G$ (v případě $\partial G \subset G$, spec. $G$-kompaktní) je velmi obtížné (celá teorie t.zv. „vázaných" extrémů) – my se „uskromníme" na případ $n=2$ a jednoduché vazby mezi danou funkcí a hranicí množiny $G$ (viz náš příklad), kde to „zvládneme".

Zkusme vše shrnout ještě ve dvou příkladech!

1. $f(x,y) = x^2+y^2-2y$

a) $G_1 = R^2$

b) $G_2 = \{(x,y);\ x^2 \le y \le 4\}$

a) globální extrémy: (pozorné „řešení")

v $R^2$:

$$\left.\begin{array}{l} f(x,0) = x^2 \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x,0) = +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f nemá v } R^2 \text{ glob. maximum}$$

globální minimum? vidíme:

$$f(x,y) \geqq f(0,y) = y^2-2y = (y-1)^2-1 \geqq -1$$

a pro $y=1$ je „zde" minimum, tj.

globální minimum $f$ je v bodě $(0,1)$, $f(0,1) = -1$

a „ověření podmínek" pro lokální extrém (vnitřní – v bodě z $R^2$, kde je glob. minimum, je i minimum lokální)

$\nabla f(x,y) = (2x, 2y-2)$, tj. $\nabla f(x,y) = \vec{o} \Leftrightarrow (x,y) = [0,1]$

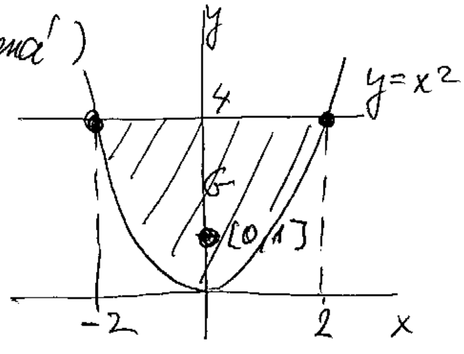
– „vyšlo"!

Zároveň odtud plyne, že už žádný bod lokálního extrému (a tedy ani globálního) funkce nemá.

A zatím v těchto jednodušších příkladech nám stačí „zdravý rozum" – obecně obtížné (my budeme řešit příklady jednoduché)

b) $G_2$ – kompaktní množina (uzavřená a omezená)

$f$ je spojitá na $G$, tedy $f$ nabývá na $G$ svých globálních extrémů –




(i) globální minimum je nutně v $[0,1] \in G$ (protože je to minimum v $R^2$!)

další lokální extrémy funkce $f$ již nemá (v $R^2$), tedy z toho plyne, že globální maximum na $G_2$ bude mít $f$ na hranici $G_2$, což je: $\partial G_2 = \omega_1 \cup \omega_2$,

$\omega_1 = \{(x,y)\,;\ y = x^2,\ x \in \langle -2,2 \rangle\}$ a

$\omega_2 = \{(x,y)\,;\ y = 4,\ x \in (-2,2)\}$ :

$\underline{\omega_1 : \quad f(x,y) = f(x,x^2) = x^2 + x^4 - 2x^2 = x^4 - x^2 \equiv g(x)}$

$\underline{x \in \langle -2,2 \rangle :} \quad \underline{g(-2) = g(2) = 12 = f(-2,4) = f(2,4)}$

$x \in (-2,2)$, $\quad g'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$,

tj. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \ \vee\ x_{2,3} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \in (-2,2)$

a odtud body „podezřelé" z globálního maxima jsou ($y = x^2$)
$(x_1,y_1) = (0,0)$, $(x_2,y_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$, $(x_3,y_3) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ a
$\underline{f(0,0) = 0 \quad , \quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}}$

$\underline{\omega_2 :}$ $\quad f(x,y) = f(x,4) = x^2 + 8$, $\ x \in (-2,2)$

vyšetříme fci jedné proměnné $\underline{h(x) = x^2 + 8,\ x \in (-2,2)}$ :

$h'(x) = 2x$, $\ h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, tj. bod podezřelý je $[0,4]$, a $f(0,4) = 8$

Tedy, na hranici je maximum v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$, a to $f(-2,4) = f(2,4) = 12$, a zároveň je zde globální maximum fce $f$ na $G_2$ (viz předchozí úvahy)

Poznámka: Rozmysli, že někdo z vás umí globální maximum „vidět": když funkci $f$ zapíšeme (hodilo se to u $G_1$) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2 - 1$, pak je „vidět", že maximum $f$ bude „tam", kde je maximální $x^2$ a $y$ pro body z $G_2$, a to je (viz „obrázek" na začátku příkladu) $x = \pm 2$ a $y = 4$!

2. příklad: $f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$, $G = R^2$

vyšetření globálních i lokálních extrémů:

a) globální extrémy – i když je $f$ spojitá v $R^2$, o extrémech zatím nic nevíme, neboť $R^2$ není kompaktní množina

zkusme „řezy":

$$f(x,0) = x^3+5, \ \lim_{x\to\pm\infty}(x^3+5) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x,0) = \pm\infty \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $f$ nemá v $R^2$ globální maximum ani globální minimum

b) lokální extrémy – pokud chceme vyšetřit lokální extrémy, tak zatím jen umíme, jak najít kritické body pro lokální extrém: $\nabla f(x,y) = (3x^2 - 6y,\ 24y^2 - 6x)$ a

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2 - 2y = 0 \\ \wedge\ 4y^2 - x = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \ \vee\ \begin{matrix} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{matrix}$$

(eliminací: $x = x^4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$)

Stacionární body jsou: $[0,0]$ a $[1,\frac{1}{2}]$

v $[0,0]$: $f(x,0) = x^3+5$, a tedy v $[0,0]$ není lokální extrém, neboť: $f(0,0) = 5$ a $f(x,0) > 5$ pro $x > 0$, $f(x,0) < 5$ pro $x < 0$

Ale zatím neumíme zjistit, zda stacionární bod $(1, \frac{1}{2})$ je bodem lokálního extrému naší funkce – a tedy je před námi

„Poslední" část vyšetřování extrémů funkce více proměnných – „vyšetření, zda ve stacionárních bodech lokální extrém je, či není.

Připomenutí MA1 – funkce jedné proměnné:

1) tedy: $f'(x_0)=0$, zjistili jsme chování „ $f'(x)$ v okolí bodu $x_0$, tedy: $f'(x)$ měnila v bodě $x_0$ „znaménko", pak v bodě $x_0$ byl lokální extrém;

nebo

2) $f''(x_0)>0 \Rightarrow$ v bodě $x_0$ je ostré lokální minimum

$f''(x_0)<0 \Rightarrow$ v bodě $x_0$ je ostré lokální maximum

2. proč – lokální extrém v bodě $x_0$ lze vyšetřit pomocí přírůstku fce (a to i u funkcí více proměnných):

$f: G \subset R^n \to R$, $X_0 \in G^0$, pak v $X_0$ je

lokální maximum, tedy $f(X)-f(X_0) \leq 0$ v $\mathcal{U}(X_0)$;

lokální minimum, tedy $f(X)-f(X_0) \geq 0$ v $\mathcal{U}(X_0)$;

ostré lokální maximum, tedy $f(X)-f(X_0) < 0$ v $P(X_0)$;

ostré lokální minimum, tedy $f(X)-f(X_0) > 0$ v $P(X_0)$.

Pro $n=1$ (ZS, MA1): $x_0$ je-li stacionární bod a ex.-li $f''(x_0)$, pak (užití Taylorova polynomu):

$$f(X)-f(X_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(X-X_0)^2 + \omega_2(X-X_0),$$

neboť $f'(x_0)=0$ pro stac. bod, a $\lim_{X \to X_0} \frac{\omega(X-X_0)}{(X-X_0)^2} = 0$, tedy, pro $x-x_0 \to 0$ je chyba $\underset{2}{\omega}(x-x_0)$ „řádově menší" „než" $(x-x_0)^2$ a pro $f''(x_0) \neq 0$ bude ve výrazu (pro $(x-x_0)$ „dosti malé")

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \underset{2}{\omega}(x-x_0)$$

bude o znaménku „rozhodovat" $f''(x_0)$, a přírůstek bude mít stejné znaménko (v malém okolí bodu $x_0$) jako $f''(x_0)$.

Je-li $f''(x_0)=0$, nic „neví" – znaménko dfg neznáme (a asi bychom užili Taylorův polynom vyššího stupně)

<u>A jak „vytvoříme" analogii pro více proměnných?</u>

<u>Ukážeme si to pro $n=2$</u> (pro $n \geq 3$ je vysvětlení náročnější, neznáme potřebné znalosti z LA)

<u>pro $n=1$</u> je $f''(x_0)(x-x_0)^2$ t.zv. druhý diferenciál $f$ v bodě $x_0$ (a přírůstku $(x-x_0)$)

označme $x-x_0=h$, pak $df(x_0)(h) = f'(x_0).h$ a druhý diferenciál je $\underline{d^2f(x_0)(h)} = d\left(f'(x)(h)\right)\Big|_{x=x_0}(h) = \underline{f''(x_0).h^2}$

<u>pro $n=2$</u>: předpokládáme $f \in C^{(2)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$ (a značme $dx=h, dy=k$)

pak $df(x_0,y_0)(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).k$, a definujeme

pak $d^2f(x_0,y_0)(h,k) \underset{def.}{=} d\left(df(x,y)(h,k)\right)(h,k)\Big|_{(x_0,y_0)}$ ; tedy

$$d^2f(x,y)(h,k) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y).h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).k\right)h + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)k\right)k =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)h.k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)k^2$$

(neboť $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ dle předpokladu v $\mathcal{U}(x_0,y_0)$)

Matice tedy v bodě $(x_0,y_0)$: druhý diferenciál (nebo diferenciál 2. řádu):

$$d^2f(x_0,y_0)(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0)h.k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0).k^2$$

(pro zjednodušení – dobře se pamatuje:

$$d^2f = \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k\right)^2(f)$$ (u derivací místo "mocniny" je odpovídající derivace 2. řádu)

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}h + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}h.k + \frac{\partial^2}{\partial y^2}k^2\right)(f)$$ (píše se krátko jako „operátor")

tedy: $$d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}h + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}k^2$$ )

A pak platí (uvedeme si bez důkazu)

Věta: Je-li $f \in C^{(2)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$, pak

$$f(x,y)-f(x_0,y_0) = df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) \quad (*)$$
$$+R_2(x-x_0,y-y_0),$$

kde $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_2(x-x_0,y-y_0)}{\|((x-x_0),(y-y_0))\|^2} = 0$$

Polynom ve dvou proměnných $(x,y)$

$$T_2(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0)$$

je Taylorův polynom 2. stupně funkce $f(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0)$,

$R_2(x-x_0,y-y_0)$ – opět se nazývá zbytkem v Taylorově vzorci $(*)$

Poznámka:

1) Je-li $f \in C^{(n)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$, lze definovat diferenciály až do $n$-tého řádu:

Je-li definován $d^{k-1}(x_0,y_0)(h,k)$, pak

$$d^k(x_0,y_0)(h,k) = d\left(d^{k-1}(x,y)(h,k)\right)\Big|_{(x_0,y_0)}(h,k) \quad ;$$

2) a platí věta o Taylorově polynomu $n$-tého stupně funkce $f$ v bodě $(x_0,y_0)$:

$$f(x,y) = T_n(x,y) + R_n(x-x_0,y-y_0) \text{, kde}$$

$$T_n(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \frac{1}{2}d^2f(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n!}d^nf(x_0,y_0)(x-x_0,y-y_0) \quad \text{a}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{R_n(x-x_0,y-y_0)}{\|(x-x_0,\ y-y_0)\|^n} = 0$$

Podobně lze definovat diferenciály vyšších řádů i pro funkce $n$-proměnných ($n \geq 3$) a platí i analogická věta o Taylorovu polynomu – nebudeme „probírat", zůstaneme u $n=2$ (jak jsme již uváděli dříve – jednodušší).

A nyní zpět k vyšetřování lokálních extrémů fce $f(x,y)$:

A jak (?) – pomůže nám něčím právě $T_2(x,y)$ v bodě $(x_0,y_0)$ – stacionárním bodě funkce $f$, tj. „pomůže" $d^2f(x_0,y_0)$:

Je-li bod $(x_0,y_0)$ stacionární bod funkce $f(x,y)$ $\left(f \in C^{(2)}(U(x_0,y_0))\right)$, pak $\nabla f(x_0,y_0) = \vec{o}$ a tedy $df(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) = 0$, a v $U(x_0,y_0)$ přírůstek je vyjádřen

$$(*) \qquad f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{1}{2} d^2 f(x_0,y_0)(x-x_0, y-y_0) + R_2(x-x_0, y-y_0)$$

Označme pro zjednodušení „pohledu" $x-x_0 = h$, $y-y_0 = k$;
jak už bylo poznamenáno dříve, lokální extrém funkce $f$ v $(x_0,y_0)$ „poznáme" podle toho, zda v nějakém (třeba malém) okolí $U(x_0,y_0)$ (nebo $P(x_0,y_0)$ pro ostrý lokální extrém) „nemění" přírůstek $f$ znaménko. Z vyjádření $(*)$ pro přírůstek $f$ je „vidět", že nejspíš rozhodne $d^2 f(x_0,y_0)$ – například, tedy bude v $P(x_0,y_0)$ $d^2 f(x_0,y_0) > 0$, tak, bude-li $P(x_0,y_0)$ dostatečně malé, chyba bude „řádově" menší než $d^2 f(x_0,y_0)$ a tak asi „vyhraje" znaménko diferenciálu a přírůstek bude v $P(x_0,y_0)$ kladný, tj. v $(x_0,y_0)$ bude mít $f(x,y)$ ostré lokální minimum (a asi si to umíte představit i s obráceným znaménkem). A uvidíme, že pokud nebude mít $d^2 f(x_0,y_0)$ „stálé" znaménko v „žádném" okolí $P(x_0,y_0)$, pak $f$ nebude mít v $(x_0,y_0)$ lokální extrém. Ukažme si:

Pro zjednodušení (další) zavedeme označení $\left(f \in C^2(U(x_0,y_0))\right)$

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0), \quad a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$$

a ponechme $h = x-x_0$, $k = y-y_0$:

Pak $d^2f(x_0,y_0)(h,k) = a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2 \; (= Q(h,k))$

– tento výraz se nazývá kvadratická forma (ve dvou proměnných)
(a zpravidla značí $Q(h,k)$)

A nyní o „znaménku" $Q(h,k)$: $\left\{\begin{array}{l}\text{Pro zájemce „odvození", ale}\\ \text{potřebujeme až výsledek – stačí.}\end{array}\right.$

1) znaménko formy $Q(h,k)$ nezávisí na velikosti vektoru $(h,k)$:
$\lambda \neq 0$: $Q(\lambda h, \lambda k) = \lambda^2 Q(h,k)$

2) Definice (pro snazší vyjádření vlastností $Q(h,k)$, které potřebujeme pro vyšetření lokálních extrémů)

$Q(h,k)$ je

(1) pozitivně definitní, když : $\forall (h,k) \neq (0,0)$ je $Q(h,k) > 0$

(2) negativně definitní, když : $\forall (h,k) \neq (0,0)$ je $Q(h,k) < 0$

(3) indefinitní, když $\exists (h_1,k_1)$: $Q(h_1,k_1) > 0$
a $\exists (h_2,k_2)$: $Q(h_2,k_2) < 0$

(4) pozitivně semidefinitní $\forall (h,k)$ : $Q(h,k) \geq 0$
negativně semidefinitní $\forall (h,k)$ $Q(h,k) \leq 0$
a pro nějaké $(\bar{h},\bar{k}) \neq (0,0)$ je $Q(\bar{h},\bar{k}) = 0$

Příklady kvadratických forem:

(1) $Q(h,k) = h^2 + 3k^2$ – pozitivně definitní

(2) $Q(h,k) = -h^2 - 3k^2$ – negativně definitní

(3) $Q(h,k) = 3h.k$ – indefinitní, neboť
$Q(1,1) = 3,\ Q(1,-1) = -3$

$Q(h,k) = h^2 - k^2$ – indefinitní, neboť
$Q(1,0) = 1 > 0,\ Q(0,1) = -1 < 0$

(4) $Q(h,k) = h^2$ – pozitivně semidefinitní, neboť
$Q(h,k) = h^2 \geqq 0 \quad \forall (h,k)$, ale
$Q(0,k) = 0$ pro $\forall k \in R$

(5) $Q(h,k) = h^2 - 4hk + 3k^2$ – ? „nevidíme" – vyřešíme!

Jak zjistíme, jak se „chová" kvadratická forma?
Pro $n=2$ (pro $n \geqq 3$ jsou výsledky též známé, viz literatura – LA – ale zůstaneme u toho nejjednoduššího případu $n=2$)

Máme-li $Q(h,k) = a_{11}h^2 + 2a_{12}hk + a_{22}k^2$, vhodně upravíme:

1) je-li $a_{11} \neq 0$:

$$Q(h,k) = \frac{1}{a_{11}}\left(a_{11}^2h^2 + 2a_{12}a_{11}hk + a_{11}a_{22}k^2\right) = \text{(doplnění „na čtverec")}$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\left[(a_{11}h + a_{12}k)^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^2\right] \quad (*)$$

Když označíme $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ (A – symetrická matice), matice kvadratické formy Q

pak $Q(h,k) = (h,k)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$

a vidíme, že v $(*)$ je u $k^2$ $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$.

a z (*) již pak snadno dostaneme:

(1) $\det A > 0 \Rightarrow Q(h,k)$ je positivně definitní pro $a_{11} > 0$
a negativně definitní pro $a_{11} < 0$

(2) $\det A < 0 \Rightarrow Q(h,k)$ je indefinitní

(3) $\det A = 0 \Rightarrow Q(h,k)$ je semidefinitní

Naznačení, proč:

(1) $(a_{11}h + a_{12}k)^2 \geqq 0$, tedy, je-li $k \neq 0$ a $\det A > 0$, je
$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)k^2 > 0 \Rightarrow Q(h,k) > 0$ (pro $a_{11} > 0$) nebo
a $Q(h,k) < 0$ (pro $a_{11} < 0$)
a pro $k = 0$ je $h \neq 0$ (neboť $(h,k) \neq 0$, a pak $(a_{11}h)^2 > 0$;

(2) předpokládejme $a_{11} > 0$ (pro $a_{11} < 0$ analogicky): pro $h \neq 0$ je
$Q(h,0) = \frac{1}{a_{11}} \cdot (a_{11}h)^2 > 0$, ale zvolíme-li $(\bar{h}, \bar{k})$ takový,
že $\bar{k} \neq 0$ a $a_{11}\bar{h} + a_{12}\bar{k} = 0$, pak $Q(\bar{h}, \bar{k}) = \frac{1}{a_{11}} \det A \cdot \bar{k}^2 < 0$ –
– tedy $Q$ je indefinitní forma;

(3) $\det A = 0$, pak $Q(h,k) = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}h + a_{12}k)^2$ a díky $a_{11} \neq 0$
lze najít vektor $(\bar{h}, \bar{k}) \neq (0,0)$ tak, že $a_{11}\bar{h} + a_{12}\bar{k} = 0$,
tj. $Q(\bar{h}, \bar{k}) = 0$, a $Q(h,k) \geqq 0$ pro $a_{11} > 0$
nebo $Q(h,k) \leqq 0$ pro $a_{11} < 0$, tedy $Q(h,k)$ je
semidefinitní forma.

a zbývá:

2) $a_{11}=0,\ a_{22}=0,\ a_{12}\neq 0$:

pak $Q(h,k) = 2a_{12}hk$ – tedy $Q(h,k)$ je indefinitní forma
(viz příklad 3)

3) $a_{11}=0,\ a_{22}\neq 0$:

$$Q(h,k) = 2a_{12}hk + a_{22}k^2 = \frac{1}{a_{22}}\left[(a_{12}h + a_{22}k)^2 - a_{12}h^2\right],$$

pak, je-li

(i) $a_{12}\neq 0$, je forma $Q(h,k)$ indefinitní, neboť

a) zvolíme-li body $(0,k)$, $k\neq 0$, je $Q(0,k) = a_{22}k^2$
(tedy $Q(0,k)>0$ pro $a_{22}>0$, $Q(0,k)<0$ pro $a_{22}<0$);

b) zvolíme-li $(h,k)$ tak, aby $k\neq 0$ a $h = -\frac{a_{22}}{a_{12}}k$, je
$a_{12}h + a_{22}k = 0$, $Q(h,k) = -a_{22}k^2$
(tedy $Q(h,k)<0$ pro $a_{22}>0$, $Q(h,k)>0$ pro $a_{22}<0$);

z a), b) „vidíme", že forma $Q(h,k)$ je indefinitní;

(ii) $a_{12}=0$, forma $Q(h,k)$ je semidefinitní:
zde $Q(h,k) = a_{22}k^2$, tedy pro všechna $(h,k)$ je
$Q(h,k)\geqq 0$, je-li $a_{22}>0$, resp. $Q(h,k)\leqq 0$ pro $a_{22}<0$,
a $Q(h,0)=0$ pro všechna $h\neq 0$, tedy $Q$ je positivně semidefinitní pro $a_{22}>0$, resp. negativně semidefinitní, je-li $a_{22}<0$.

A nyní souvislost kvadratické formy $Q(h,k)$ a nabývání lokálních extrémů funkce dvou proměnných (ve stacionárním bodě):

Platí: je-li $f\in C^2(U(x_0,y_0))$, kde $(x_0,y_0)$ je stacionární bod funkce $f$,
pak
1) je-li $d^2f(x_0,y_0)(h,k)$ positivně definitní forma, $f$ má v bodě $(x_0,y_0)$ ostré lokální minimum (je $f(x,y)-f(x_0,y_0)>0$ v $P(x_0,y_0)$)
2) je-li $d^2f(x_0,y_0)(h,k)$ negativně definitní forma, $f$ má v bodě $(x_0,y_0)$ ostré lokální maximum ($f(x,y)-f(x_0,y_0)<0$ v $P(x_0,y_0)$)

3) je-li $d^2f(x_0,y_0)(h,k)$ indefinitní forma, pak $f$ nemá v bodě $(x_0,y_0)$ lokální extrém;

4) je-li $d^2f(x_0,y_0)(h,k)$ semidefinitní (positivně, resp. negativně), nemůžeme nic říci (zde tam, kde $d^2f(x_0,y_0)(h,k)=0$ pro $(h,k)\neq(0,0)$ o přírůstku „rozhoduje chyba" – a jejíž znaménko neznáme)

A souvislost s obecnými výsledky pro $Q(h,k) = d^2f(x_0,y_0)(h,k)$: Matice této kvadratické formy je (viz význam $a_{11}, a_{22}, a_{12}$) t.zv. Hessova matice a její determinant (důležitý pro rozhodnutí o extrémech) je t.zv. Hessián:

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0), & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

a pro $f \in C^{(2)}(\mathcal{U}(x_0,y_0))$ je $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$.

A platí:

Věta: 1) $H_f(x_0,y_0) > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ $\left(\Rightarrow \text{i } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) > 0\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ má v bodě $(x_0,y_0)$ ostré lokální minimum

2) $H_f(x_0,y_0) > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ $\left(\Rightarrow \text{i } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) < 0\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow f$ má v bodě $(x_0,y_0)$ ostré lokální maximum

3) $H_f(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow$ $f$ nemá v bodě $(x_0,y_0)$ lokální extrém

( $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)$ , $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ , pokud jsou nenulové, mají opačná znaménka)

4) $H_f(x_0,y_0) = 0$ – „nelze nic říci"

Možná třeba pomůže „grafická" představa:

1) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow$ oba „řezy" rovinami $x = x_0$, $y = y_0$ jsou „$\cup$"
(tedy lokální minimum)

2) podobně pro $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) < 0$ – pak „oba řezy" grafu $f$ jsou $\cap$
(tedy lokální maximum)

3) jsou-li $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) \neq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \neq 0$ a opačných znamének, pak řezy grafu jsou: $\cup$ a $\cap$ –
– tj. zde je „sedlový bod" – není zde lokální extrém

! Upozornění pro „čtenáře" – pro úspěch u zkoušky (a snad i u zápočtu) stačí tento předchozí výsledek – souvislost „lokálního extrému a Hessiánu" – a předchozí výklad celý je zde pro (úplnost a) zajímavost (ale možná se někdy v aplikacích hodí)

A nyní jsme konečně schopni (snad) dobrečit příklad 2:
(strana 13 „přednášky")

Vyšetřovali jsme extrémy funkce
$$f(x,y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5 \quad v \ R^2,$$
a zůstal nám problémek – stacionární bod $(1, \frac{1}{2})$:

A tak:
$$H(x,y) = \begin{vmatrix} 6x\,, & -6 \\ -6\,, & 48y \end{vmatrix} = 36 \begin{vmatrix} x & -1 \\ -1 & 8y \end{vmatrix} = 36(8xy-1)$$

1) vyzkoušejme i bod $(0,0)$ (též stacionární), ale zde se nám „povedlo" rozumným „pohledem" na danou funkci ukázat, že v $(0,0)$ nemá f lokální extrém –
a „početně" (mechanicky)
$$H(0,0) = -36 < 0 \Rightarrow v \ (0,0) \text{ není lokální extrém}$$
(asi jednodušší)

2) $H(1, \frac{1}{2}) = 36(8 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} - 1) = 36 \cdot 3 > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ v bodě $(1, \frac{1}{2})$ má fce f ostrý lokální extrém,
a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, \frac{1}{2}) = 6 > 0 \Rightarrow$ v bodě $(1, \frac{1}{2})$ má f
ostré lokální minimum

A ukažme si ještě další příklady:

**Příklad 3** $\quad f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^3 \;,\; G = R^2$

1) globální extrémy:

$$f(x,x) = (x-1)^3 \;,\; \lim_{x\to\pm\infty} (x-1)^3 = \pm\infty \;\Rightarrow\;$$ f nemá v $R^2$ globální extrémy

2) lokální extrémy:

$$\nabla f(x,y) = \left(2(x-y)\,;\; -2(x-y)+3(y-1)^2\right)$$

stacionární body: $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff$ (1) $x = y$

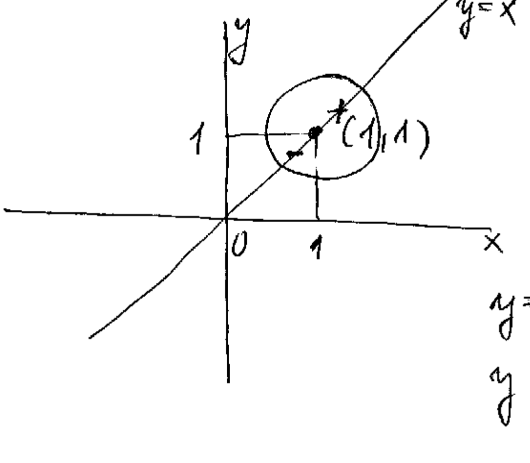
(2) $-2(x-y)+3(y-1)^2 = 0$

$\iff$ $y=1$ a $x=1$, tj. jediný stac. bod je

$(x_0,y_0) = (1,1)$ ! $\quad H_f(x,y) = \begin{vmatrix} 2, & -2 \\ -2, & 2+6(y-1) \end{vmatrix}$ ,

$$H_f(1,1) = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \; -$$

tedy zde nám Hessián „nepomůže" – „podíváme se":




V libovolném okolí $O(1,1)$ jsou body, kde $y=x$ (viz poznámka na obrázku), a pro

$$\left.\begin{array}{l} y=x,\; x>1 \text{ je } f(x,x) = (x-1)^3 > 0 \\ y=x,\; x<1 \text{ je } f(x,x) = (x-1)^3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$f(1,1) = 0$$

$\Rightarrow$ f nemá v bodě $(1,1)$ lokální extrém (je to „sedlový" bod)

Příklad 4 $\quad f(x,y) = \sin(x^2+y^2) \quad , \quad G = \mathbb{R}^2$

Z vlastností funkce „sinus“ a z naší „představy“ grafu $f$ (rotační plocha) vidíme hned:

1) $f$ má neostrá globální maxima $(=1)$ v bodech, pro které je
$$x^2+y^2 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0,1,2\dots \quad \text{(kružnice o středu v } (0,0))$$

2) $f$ má neostrá globální minima $(=-1)$ v bodech, pro které je
$$x^2+y^2 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k = 0,1,2\dots \quad (\quad \text{—〃—} \quad)$$

Pro body v 1) a 2) nemělo Hessián fungovat – dává výsledky jen pro „ostré“ extrémy – vyzkoušejte, že pro body $(x,y)$ z 1) i 2) je $H(x,y)=0$

Ale ještě jsme nevyšetřovali, zda není další stacionární bod:
$$\nabla f(x,y) = \cos(x^2+y^2)\,(2x,2y), \quad \text{tj.}$$
$\nabla f(x,y) = (0,0)$ jen pro bod $(x_0,y_0) = (0,0)$:

$f(0,0) = \sin(0) = 0$, a $f(x,y) = \sin(x^2+y^2) > 0$ pro
$$0 < x^2+y^2 < \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow$$
$\Rightarrow$ v bodě $(x_0,y_0) = (0,0)$ je ostré lokální minimum,

a když si „dále prácí“ s Hessiánem (tj. s druhými „derivacemi“ funkce $f$), pak vyjde (a zkuste si to):
$$H(0,0) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ (dle věty o lokálních extrémech) v bodě $(0,0)$ má $f$ ostré lokální minimum (už víme).

A nyní řešení dvou úvodních problémů:

1) Máme najít rozměry hranolu – vany – daného objemu V tak, aby povrch (bez víka) vany byl minimální.

Jsou-li $a, b, c$ ($>0$) rozměry vany, pak ($V$-objem, $S$-povrch)

$$V = abc \quad \text{a} \quad S = ab + 2(ac + bc)$$

($c$ – volíme jako „výšku")

Z $V$ tedy: $c = \frac{V}{ab}$, pak $S(a,b) = ab + 2V\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

(například)

A máme vyřešit globální minimum funkce $S(a,b)$ na množině $G = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$

(i) $S(a,b)$ je spojitá fce, ale $G$ není kompaktní množina, tedy větu o existenci globálních extrémů použít nemůžeme, ale:

$$\lim_{\substack{a\to+\infty,\ b>0 \\ (b\to+\infty,\ a>0)}} S(a,b) = +\infty, \quad \lim_{\substack{a\to0+,\ b>0 \\ (b\to0+,\ a>0)}} S(a,b) = +\infty, \quad S(a,b) > 0,$$

tedy minimum bude (asi) existovat – kde?

(ii) hledáme kritické body pro lokální extrém (v $G$)

$$\nabla S(a,b) = \left(b - \frac{2V}{a^2},\ a - \frac{2V}{b^2}\right), \text{ pak}$$

$$\nabla S(a,b) = (0,0) \iff 2V = ba^2 \wedge 2V = ab^2, \text{ tj.}$$

$$ab^2 = a^2b \iff a = b \quad (a>0, b>0)$$

$$\text{pak } a^3 = 2V, \text{ tj. } a = b = \sqrt[3]{2V}$$

$$\text{a} \quad c = \frac{V}{ab} = \frac{V}{\sqrt[3]{(2V)^2}} = \sqrt[3]{\frac{V}{4}} \quad \left(\text{pak } a.b.c = \sqrt[3]{4V^2}.\sqrt[3]{\frac{V}{4}} = V\right)$$

Mělo by zde být lokální a tedy dle „našich představ" i globální minimum:

<u>Potvrzení lokálního minima:</u>

$$H\left(\sqrt[3]{2V},\ \sqrt[3]{2V}\right) = \left|\begin{matrix} \frac{4V}{a^3}, & 1 \\ 1, & \frac{4V}{b^3} \end{matrix}\right|_{\left(\sqrt[3]{2V},\ \sqrt[3]{2V}\right)} = 3 > 0, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a^2}\left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}\right) > 0$$

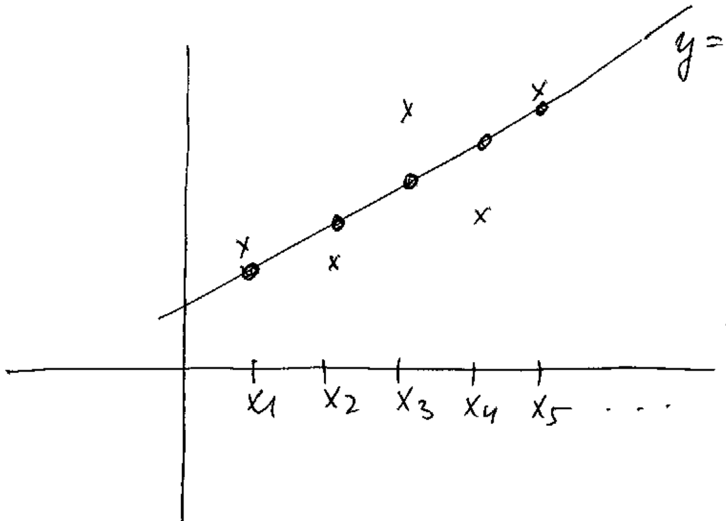
$\Rightarrow$ v bodě $\left(\sqrt[3]{2V},\ \sqrt[3]{2V}\right)$ je ostré lokální (a tedy i globální) minimum.

A minimální povrch (bez víka) je (ale raději „přepočítejte"):

$$\underline{S_{min} = 3\sqrt[3]{4V^2}}.$$

2. <u>Metoda „nejmenších čtverců"</u>

měří se opakovaně veličina $y = y(x)$, o které předpokládáme, že $y(x) = ax + b$ (tj. že $y$ „závisí lineárně na $x$") –
– měříme pro $x_1, \dots, x_n$, $x_i \neq x_j$, naměřené hodnoty $y$ pro $x_i$ označme $y_i$ – graficky (na začátku „přednášky")




$y = ax + b$ ? – .

Otázka byla, jak najít „nejlepší aproximaci veličiny $y$ lineárně závislou", tj. najít koeficienty $a, b$ v lineární funkci $y = ax + b$ tak, aby naměřené hodnoty a „vypočítané" hodnoty byly „co nejblíže"

Metoda „nejmenších čtverců" (zde kvadrátů) spočívá v tom, že hledáme takovou lineární funkci $y = ax + b$, aby pro naměřené hodnoty $y_i$ (odpovídající „volbě" $x_i$) a vypočítané hodnoty $y_i^* = ax_i + b_i$ (vypočítané hodnoty značme $y_i^*$) platilo, že

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2 \quad (*)$$

je minimální (součet kvadrátů rozdílu naměřených hodnot a vypočítaných pro $x = x_i$).

Kdybychom $n$-tici naměřenou $(y_1, \ldots, y_n) = Y \in R^n$ a $n$-tici vypočítanou $(y_1^*, \ldots, y_n^*) = Y^*$ brali jako body z $R^n$, pak výraz v $(*)$ je $d_n^2(Y, Y^*)$ (tj. kvadrát vzdálenosti (Euklidovské) bodů $Y, Y^*$, tj. hledáme $a, b$ v lineární funkci tak, aby „body naměřené" a „vypočítané" byly sobě nejblíže – v $R^n$ s Euklidovskou vzdáleností.

<u>Tedy: formulace úlohy</u> – hledáme globální minimum funkce

$$f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2 \quad v \ R^2$$

($x_1, \ldots, x_n$ a $y_1, \ldots, y_n$ jsou dané hodnoty – z měření)

„Situace": $f(a,b)$ je funkce spojitá a nezáporná v $R^2$, a když „pojedeme" cestami $(a, ka)$, $k \in R$ k „$\infty$", tj. $a \to \infty$, pak

$$\lim_{a \to \infty} f(a, ka) = \lim_{a \to \infty} \sum_{i=1}^{n} (a(x_i + k) - y_i)^2 = +\infty$$

$\Rightarrow$ intuice říká (odpovídá našim znalostem), že (asi) taková funkce $f(a,b)$ globální minimum má

A kde? Hledáme stacionární body funkce $f(a,b)$, tj. body, kde $\nabla f(a,b) = (0,0)$, tedy máme řešit soustavu rovnic

$$\left(\frac{\partial f}{\partial a}(a,b) = \right) \quad 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i)x_i = 0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial b}(a,b) = \right) \quad 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i+b-y_i) = 0$$

A po úpravě dostaneme soustavu rovnic (lineárních) pro $a, b$:

$$(**) \quad \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n}x_i = \sum_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\sum x_i + nb = \sum y_i \end{cases}$$

Determinant soustavy je $D = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n}x_i^2 & \sum_{i=1}^{n}x_i \\ \sum_{i=1}^{n}x_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2$,

a dá se ukázat, že $D \neq 0$ (dokonce je $D > 0$), tedy soustava $(**)$ má právě jedno řešení $(\bar{a}, \bar{b})$, je-li $x_i \neq x_j$, $i \neq j$, $i,j = 1,2,\dots,n$.

A ptáme-li se, zda je zde lokální minimum, a tedy nějaké (dle úvahy dříve) i globální – vypočtěme Hessián v $(\bar{a},\bar{b})$:

Ale vidíme, že

$$H(\bar{a},\bar{b}) = \begin{vmatrix} 2\sum_{i=1}^{n}x_i^2, & 2\sum_{i=1}^{n}x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n}x_i, & 2n \end{vmatrix} = 4D > 0, \text{ také } \left(\frac{\partial^2 f}{\partial a^2} > 0\right)$$

v bodě $(\bar{a},\bar{b})$ má $f$ ostré lokální (a tedy i globální) minimum.

( „řešení" $\bar{a}, \bar{b}$ si můžete spočítat )

A na závěr této „obsáhlé" přednášky:

<u>Pro zájemce</u> (opět nepovinný) důkaz toho, že $D > 0$, platí-li $x_i \neq x_j$ pro $i \neq j$, $j, i = 1, 2, \ldots n$.

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \underset{\text{pro } x_i \neq x_j}{<} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i^2 + x_j^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i^2 + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} n x_i^2 + \sum_{j=1}^{n} n x_j^2\right) =$$

$$= n\sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$ tedy (shrnuto):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 < n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Rightarrow \underline{D = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 > 0}$$